Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Ediţia a XVIII-a
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
22 noiembrie 2017

Soluţii

Runda III

Problema 1.

Determinaţi numerele de două cifre care au proprietatea că $\sqrt{n+\sqrt{n+4}} \in \mathbb{N}$.

Soluţie:

$n+4$ pătrat perfect $\Rightarrow$

$n+4 \in \{16,25,36,49,64,81,100\} \Rightarrow \sqrt{n+4} \in \{4,5,6,7,8,9,10\}$

$\Rightarrow n+\sqrt{n+4} \in \{16,26,38,52,68,86,106\} \Rightarrow n=12$

Problema 2.

Considerăm n drepte concurente în punctul P. Dreptele determină în jurul punctului $2n$ unghiuri cu interioare disjuncte, fiecare unghi având măsura de 7° sau de 17°. Determinaţi numărul n.

Soluţie:

Considerăm n unghiuri adiacente situate de o parte a unei drepte dintre cele date. Fie a numărul unghiurilor cu măsura de 7°. Atunci

$7a+17(n-a)=180 \Rightarrow 17n=10(18+a)$.

Rezultă că 10 divide n şi cum $a \le \frac{180}{7} < 26 \Rightarrow n=10$ sau $n=20$.

$n=10$ nu convine , iar $n=20$ convine şi $a=16$.

Problema 3.

Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ şi $a=x-\frac{1}{y}$, $b=y-\frac{1}{x}$. Dacă $ab \in [-4,0]$, sa se determine $|xy|$.

Soluţie:

$$ab=\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(y-\frac{1}{x}\right)=xy+\frac{1}{xy}-2$$

$$-4 \le ab \le 0 \Rightarrow -4 \le xy+\frac{1}{xy}-2 \le 0 \Rightarrow -2 \le xy+\frac{1}{xy} \le 2$$

Dacă $xy \ge 0 \Rightarrow xy+\frac{1}{xy} \ge 2$. Rezultă că $xy+\frac{1}{xy}=2 \Rightarrow xy=1 \Rightarrow |xy|=1$

Dacă $xy<0 \Rightarrow xy+\frac{1}{xy} \le -2 \Rightarrow xy+\frac{1}{xy}=-2 \Rightarrow xy=-1 \Rightarrow |xy|=1$